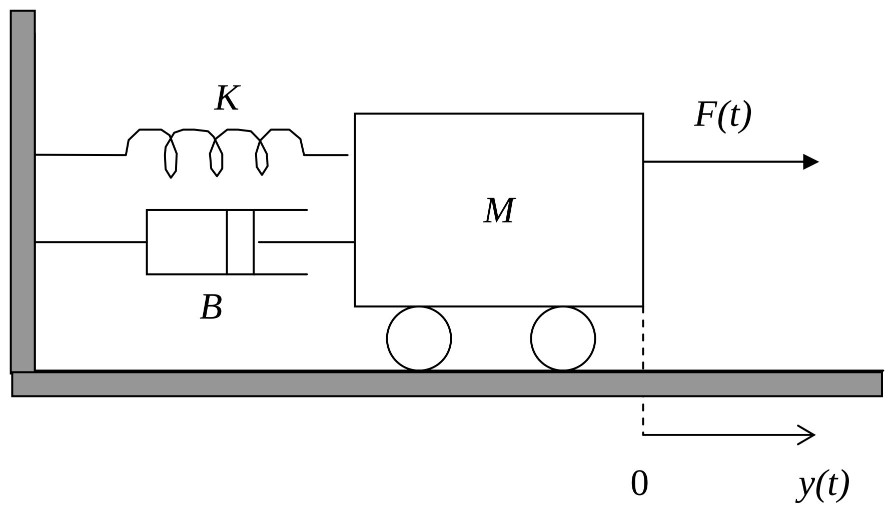
SISTEMAS MECANICOS

EJEMPLO 1.- SISTEMA MECANICO TRASLACIONAL

Carrito que se desplaza en línea recta en dirección horizontal.



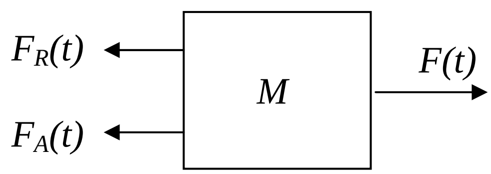
Objetivo: Determinar la respuesta dinámica del desplazamiento del carrito $y(t)$ ante una variación de la fuerza aplicada $F(t)$.

Suposiciones:
1.- Desplazamiento medido con respecto a una condición de referencia que es la posición de equilibrio.
2.- Desplazamiento y velocidad medido con respecto a un marco de referencia inercial
3.- Elementos (masa, resorte y amortiguador) ideales
4.- No hay fricción viscosa.

Constantes:
M = Masa [lbf]
B = Coeficiente de amortiguación viscosa [lbf/(ft/seg)]
K = Constante de Hooke [lbf/ft]

Variables:
$F(t)$ = Fuerza Aplicada [lbf]
$y(t)$ = Desplazamiento [ft]
$v(t)$ = velocidad
$a(t)$ = aceleración

MODELO MATEMATICO EN ECUACIONES DIFERENCIALES



- ***Ley de Newton***

$$F(t) - F_R(t) - F_A(t) = F_M(t) \tag{1}$$

- ***Ecuaciones constitutivas***

$$F_R(t) = K\ y(t) \tag{2}$$

$$F_A(t) = B\, v(t) \tag{3}$$

$$F_M(t) = M\ a(t) \tag{4}$$

$$v(t) = \frac{d\ y(t)}{dt} \tag{5}$$

$$a(t) = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \tag{6}$$

Modelo completo del sistema:

$$F(t) - K\ y(t) - B\frac{d\ y(t)}{dt} = M\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \tag{7}$$

MODELO MATEMATICO EN FUNCION DE TRANSFERENCIA

$$\overline{F} - K\,\overline{y} - B\,\frac{d\,\overline{y}}{dt} = M\,\frac{d^2\overline{y}}{dt^2} \qquad (8)$$

Restando (8) de (7):

$$F^*(t) - K\,y^*(t) - B\,\frac{d\,y^*(t)}{dt^2} = M\,\frac{d^2 y^*(t)}{dt^2} \qquad (9)$$

Tomando Transformada de Laplace:

$$F^*(s) - K\,Y^*(s) - B\,s\,Y^*(s) = M\,s^2\,Y^*(s) \qquad (10)$$

$$Y^*(s)\left(s^2 + \frac{B}{M}s + \frac{K}{M}\right) = \frac{1}{M}F^*(s) \qquad (11)$$

$$\frac{Y^*(s)}{F^*(s)} = \frac{\frac{1}{M}}{\left(s^2 + \frac{B}{M}s + \frac{K}{M}\right)} \qquad (12)$$

si hacemos

$$2\xi\omega_n = \frac{B}{M}; \qquad \omega_n^2 = \frac{K}{M}$$

$$\frac{Y^*(s)}{F^*(s)} = \frac{k\,\omega_n^2}{\left(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2\right)} \qquad (13)$$

donde $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$ $\qquad \xi = \sqrt{\frac{B^2}{4KM}}$ $\qquad k = \frac{1}{K}$

DIAGRAMA DE BLOQUES

$$F(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{\dfrac{1}{M}}{\left(s^2 + \dfrac{B}{M}s + \dfrac{k}{M}\right)}} \longrightarrow Y(s)$$

Forma general

$$F(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{k\,\omega_n^{\,2}}{\left(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^{\,2}\right)}} \longrightarrow Y(s)$$

$$k = \frac{1}{K} \qquad \xi = \sqrt{\frac{B^2}{4KM}} \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

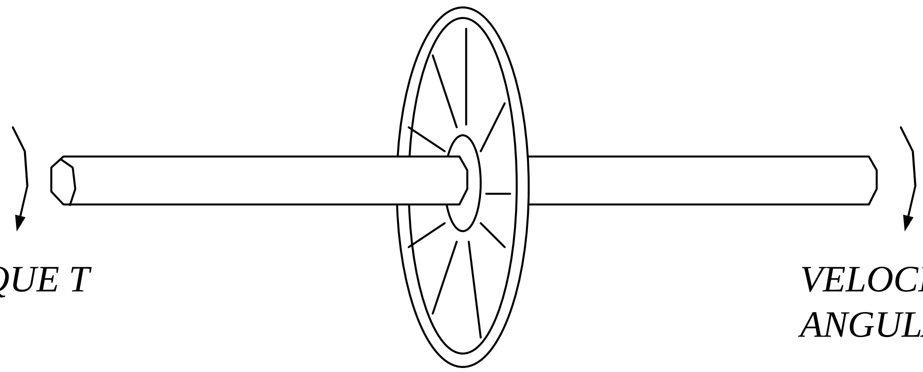
k = ganancia

ξ = coeficiente de amortiguamiento relativo

ω_n = frecuencia natural

EJEMPLO 2.- SISTEMA MECANICO ROTACIONAL

El sistema está formado por un eje al cual le está adosado un ventilador.



Objetivo: Determinar la respuesta dinámica de la velocidad angular $\omega(t)$ del eje ante una variación del torque aplicado $T(t)$.

Suposiciones:
1.- Desplazamiento angular medido con respecto a un ángulo de referencia especificado en un marco de referencia inercial.
2.- El momento de inercia es constante.
3.- Existe fricción rotacional.
4.- El coeficiente de fricción es constante.

Constantes:
J = Momento de inercia del eje y ventilador [Kg m^2]
B = Coeficiente de fricción [N m / rad/seg]

Variables:
$T(t)$ = Torque aplicado [N m]
$T_D(t)$ = Torque de oposición [N m]
$\omega(t)$ = Velocidad angular [rad / seg]
$\alpha(t)$ = Aceleración angular [rad / seg^2]

MODELO MATEMATICO EN ECUACIONES DIFERENCIALES

- ***Ley de Newton***

$$T(t) - T_D(t) = J\,\frac{d\omega(t)}{dt} \tag{14}$$

- ***Ecuaciones constitutivas***

$$T_D = B\,\omega(t) \tag{15}$$

Modelo completo del sistema:

$$T(t) - T_D(t) = J\,\frac{d\omega(t)}{dt} \tag{16}$$

$$T_D = B\,\omega(t) \tag{17}$$

MODELO MATEMATICO EN FUNCION DE TRANSFERENCIA

Sustituyendo (17) en (16):

$$T(t) - B\,\omega(t) = J\,\frac{d\omega(t)}{dt} \tag{18}$$

Estado estacionario:

$$\overline{T} - B\,\overline{\omega} = J\,\frac{d\,\overline{\omega}}{dt} \tag{19}$$

Restando (18) – (19) y escribiendo en variables de perturbación

$$T^*(t) - B\,\omega^*(t) = J\,\frac{d\omega^*(t)}{dt} \qquad (20)$$

Tomando Transformada de Laplace

$$T^*(s) - B\,\omega^*(s) = J\,s\,\omega^*(s) \qquad (21)$$

Agrupando términos queda la siguiente Función de Transferencia:

$$\frac{\omega^*(s)}{T^*(s)} = \frac{\frac{1}{B}}{\frac{J}{B}s + 1} \qquad (22)$$

Forma general

$$\frac{\omega^*(s)}{T^*(s)} = \frac{k}{\tau s + 1} \qquad \text{Sistema de 1er Orden} \qquad (23)$$

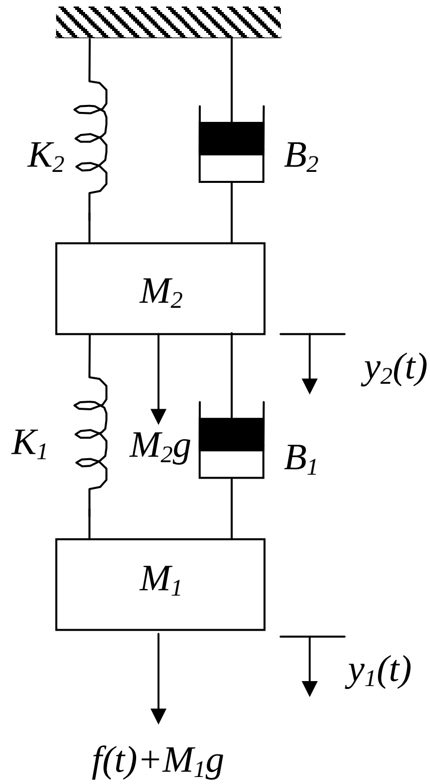
donde:

$$k = \frac{1}{B}, \qquad \tau = \frac{J}{B}$$

DIAGRAMA DE BLOQUES

$$T^*(s) \longrightarrow \boxed{\frac{k}{\tau s + 1}} \longrightarrow \omega^*(s)$$

EJEMPLO 3.- SISTEMA MECÁNICO DE DOS MASAS COLGADAS

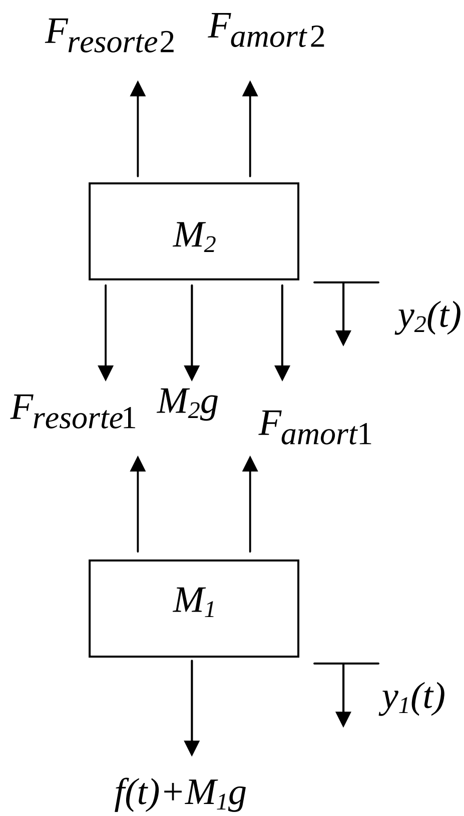


Objetivo: Determinar la respuesta dinámica del desplazamiento vertical de la masa M_1, $y_1(t)$, o de la masa M_2, $y_2(t)$,ante una variación de $f(t)$.

Suposiciones:
1.- Desplazamiento medido con respecto a una condición de referencia que es la posición de equilibrio.
2.- Desplazamiento y velocidad medido con respecto a un marco de referencia inercial
3.- Elementos (masa, resorte y amortiguador) ideales

Constantes:	***Variables:***
M_1 , M_2 = Masa de los cuerpos	$y_1(t)$, $y_2(t)$ = Desplaz. vertical de masas
K_1 , K_2 = Constante de los resortes	$f(t)$ = Fuerza aplicada
B_1 , B_2 = Coef. de fricción viscosa	$v_1(t)$, $v_2(t)$ = Velocidades de las masas
g = constante de gravedad	$a_1(t)$, $a_2(t)$ = Aceleración de las masas

Diagrama de cuerpo libre



MODELO MATEMÁTICO EN ECUACIONES DIFERENCIALES

- ***Ley de Newton***

$$f(t) + M_1 g - F_{resorte1} - F_{amort1} = M_1 \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} \qquad (24)$$

$$M_2 g + F_{resorte1} + F_{amort1} - F_{resorte2} - F_{amort2} = M_2 \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} \qquad (25)$$

- ***Ecuaciones constitutivas***

$$F_{resorte1}(t) = K_1(\ y_1(t) - y_2(t)) \tag{26}$$

$$F_{amort1}(t) = B_1(\ \frac{dy_1(t)}{dt} - \frac{dy_2(t)}{dt}) \tag{27}$$

$$F_{resorte2}(t) = K_2\ y_2(t)) \tag{28}$$

$$F_{amort1}(t) = B_2\ \frac{dy_2(t)}{dt} \tag{29}$$

$$v(t) = \frac{d\ y(t)}{dt} \tag{30}$$

$$a(t) = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \tag{31}$$

Modelo completo del sistema:

$$f(t) + M_1 g - K_1\left[y_1(t) - y_2(t)\right] - B_1\left[\frac{dy_1(t)}{dt} - \frac{dy_2(t)}{dt}\right] = M_1\ \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} \tag{32}$$

$$M_2 g + K_1\left[y_1(t) - y_2(t)\right] + B_1\left[\frac{dy_1(t)}{dt} - \frac{dy_2(t)}{dt}\right] - K_2 y_2(t) - B_2\ \frac{dy_2(t)}{dt} = M_2\ \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} \tag{33}$$

MODELO MATEMÁTICO EN FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Escribiendo en variables de perturbación:

$$f^*(t) - K_1\left[y_1^*(t) - y_2^*(t)\right] - B_1\left[\frac{dy_1^*(t)}{dt} - \frac{dy_2^*(t)}{dt}\right] = M_1\frac{d^2y_1^*(t)}{dt^2} \tag{34}$$

$$K_1\left[y_1^*(t) - y_2^*(t)\right] + B_1\left[\frac{dy_1^*(t)}{dt} - \frac{dy_2^*(t)}{dt}\right] - K_2y_2^*(t) - B_2\frac{dy_2^*(t)}{dt} = M_2\frac{d^2y_2^*(t)}{dt^2} \tag{35}$$

Aplicando Transformada de Laplace a las ecuaciones (34) y (35):

$$F^*(s) - K_1\left[Y_1^*(s) - Y_2^*(s)\right] - B_1\left[sY_1^*(s) - sY_2^*(s)\right] = M_1s^2Y_1^*(s) \tag{36}$$

$$K_1\left[Y_1^*(s) - Y_2^*(s)\right] + B_1\left[sY_1^*(s) - sY_2^*(s)\right] - K_2Y_2^*(s) - B_2sY_2^*(s) = M_2sY_2^*(s) \tag{37}$$

Reagrupando términos en ambas ecuaciones:

$$F(s) = \left(M_1s^2 + B_1s + K_1\right)Y_1(s) - \left(B_1s + K_1\right)Y_2(s) \tag{38}$$

$$0 = -\left(B_1s + K_1\right)Y_1(s) + \left(M_2s^2 + \left(B_1 + B_2\right)s + \left(K_1 + K_2\right)\right)Y_2(s) \tag{39}$$

Despejando una variable y sustituyendo la ecuación en la otra se obtienen las Funciones de Transferencia:

$$\frac{Y_1(s)}{F(s)} = \frac{M_2 s^2 + (B_1 + B_2)s + (K_1 + K_2)}{(M_2 s^2 + (B_1 + B_2)s + (K_1 + K_2))(M_1 s^2 + B_1 s + K_1) - (B_1 s + K_1)^2} \tag{40}$$

o

$$\frac{Y_2(s)}{F(s)} = \frac{B_1 s + K_1}{M_2 s^2 + (B_1 + B_2)s + (K_1 + K_2) - (B_1 s + K_1)^2} \tag{41}$$